Том 29, № 146 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Ланеев Е.Б., Климишин А.В., 2024

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-164-175

УДК 519.63, 517.955.2

О приближенном решении некорректно поставленной смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в цилиндрической области с однородными условиями второго рода на боковой поверхности цилиндра

Евгений Борисович ЛАНЕЕВ, Александр Владиславович КЛИМИШИН

ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»

117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Аннотация. Рассматривается смешанная по краевым условиям задача для уравнения Лапласа в области, представляющая собой часть цилиндра прямоугольного сечения с однородными краевыми условиями второго рода на боковой поверхности цилиндра. Цилиндрическая область с одной стороны ограничена поверхностью общего вида, на которой заданы условия Коши, т. е. заданы функция и ее нормальная производная, а другая граница цилиндрической области свободна. В этом случае задача обладает свойством неустойчивости задачи Коши для уравнения Лапласа по отношению к погрешности в данных Коши, т. е. некорректно поставлена, и ее приближенное решение, устойчивое к погрешности в данных Коши, требует применения методов регуляризации. Рассматриваемая задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. На основе решения интегрального уравнения, полученного в виде ряда Фурье по собственным функциям второй краевой задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике, построено явное представление точного решения поставленной задачи. Устойчивое приближенное решение интегрального уравнения построено методом регуляризации Тихонова. В качестве приближенного решения интегрального уравнения рассматривается экстремаль функционала Тихонова. На основе приближенного решения интегрального уравнения строится приближенное решение краевой задачи в целом. Доказана теорема сходимости приближенного решения поставленной задачи к точному при стремлении к нулю погрешности в данных Коши и при согласовании параметра регуляризации с погрешностью в данных.

Ключевые слова: некорректно поставленная задача, задача Коши для уравнения Лапласа, интегральное уравнение первого рода, метод регуляризации Тихонова

Для цитирования: *Ланеев Е.Б., Климишин А.В.* О приближенном решении некорректно поставленной смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в цилиндрической области с однородными условиями второго рода на боковой поверхности цилиндра // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 146. С. 164–175.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-164-175

SCIENTIFIC ARTICLE
© E. B. Laneev, A. V. Klimishin, 2024
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-164-175

On an approximate solution to an ill-posed mixed boundary value problem for the Laplace equation in a cylindrical domain with homogeneous conditions of the second kind on the lateral surface of the cylinder

Evgeniy B. LANEEV, Alexander V. KLIMISHIN
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklay St., Moscow 117198, Russian Federation

Abstract. We consider a problem mixed in boundary conditions for the Laplace equation in a domain that is a part of a cylinder of a rectangular cross-section with homogeneous boundary conditions of the second kind on the side surface of the cylinder. The cylindrical region is limited on one side by surface of a general kind on which the Cauchy conditions are specified, i. e. a function and its normal derivative are given, and the other boundary of the cylindrical region is free. In this case, the problem has the property of instability of the Cauchy problem for the Laplace equation with respect to the error in the Cauchy data, i. e. is ill-posed, and its approximate solution, robust to errors in Cauchy data, requires the use of regularization methods. The problem under consideration is reduced to the Fredholm integral equation of the first kind. Based on the solution of the integral equation obtained in the form of a Fourier series on the eigenfunctions of the second boundary value problem for the Laplace equation in a rectangle, an explicit representation of the exact solution of the problem was constructed. A stable approximate solution to the integral equation was constructed using the Tikhonov regularization method. The extremal of the Tikhonov functional is considered as an approximate solution to the integral equation. Based on the approximate solution of the integral equation, an approximate solution of the boundary value problem as a whole is constructed. A theorem is proved for the convergence of an approximate solution of the problem to the exact one as the error in the Cauchy data tends to zero and the regularization parameter is consistent with the error in the data.

Keywords: ill-posed problem, Cauchy problem for the Laplace equation, integral equation of the first kind, Tikhonov regularization method

Mathematics Subject Classification: 35R25, 65N20.

For citation: Laneev E.B., Klimishin A.V. On an approximate solution to an ill-posed mixed boundary value problem for the Laplace equation in a cylindrical domain with homogeneous conditions of the second kind on the lateral surface of the cylinder. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 164–175. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-164-175 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Задача Коши для уравнения Лапласа — классический пример некорректно поставленной задачи. К этой задаче приводят разнообразные математические модели, используемые в приложениях, и интерес к построению ее устойчивых решений не ослабевает даже для задач Коши для областей с простыми границами [1,2].

В работе [3] М. М. Лаврентьевым для задачи Коши для уравнения Лапласа в трехмерной области рассматривается обобщение «гасящей» функции Карлемана [4], которое, с одной стороны, дает интегральное представление (приближенного) решения задачи Коши для уравнения Лапласа, аналогично функции Грина для корректно поставленных краевых задач, с другой — выполняет регуляризирующие функции.

В работе [5] предложен метод построения решения смешанной краевой задачи в цилиндрической области прямоугольного сечения с данными Коши на поверхности общего вида. При этом на боковых гранях цилиндра заданы однородные условия первого рода. Решение поставленной задачи, в том числе точное, построено в виде ряда Фурье по собственным функциям первой краевой задачи в прямоугольнике. С использованием формул Грина задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода, устойчивое приближенное решение которого строится на основе метода регуляризации Тихонова [6]. Как следствие, из этого приближенного решения в явном виде выделена функция Карлемана–Лаврентьева и доказано, что она является таковой и по определению [3].

Предложенный в [5] метод в настоящей работе с соответствующими модификациями применен к некорректно поставленной смешанной задаче с условиями второго рода.

1. Постановка задачи

В цилиндре прямоугольного сечения

$$D^\infty = \{(x,y,z):\, 0<x<l_x,\, 0<y<l_y,\, -\infty<z<\infty\}$$

рассмотрим область $D(F,H)$, т. е. часть цилиндра, ограниченную с одной стороны плоскостью $z=H$, с другой — поверхностью

$$S = \{(x,y,z):\, 0<x<l_x,\, 0<y<l_y,\, z=F(x,y)<H\}, \quad F\in C^2.$$

В области $D(F,H)$ рассмотрим следующую смешанную краевую задачу

$$\begin{aligned} &\Delta u(M)=0, \quad M\in D(F,H),\\ &u|_S=f, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=g,\\ &\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x=0,l_x}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{y=0,l_y}=0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Будем считать, что функции f и g непрерывны на S и обеспечивают существование решения $u\in C^2(D(F,H))\bigcap C^1(\overline{D(F,H)})$ задачи (1.1).

Как задача Коши для уравнения Лапласа задача (1.1) имеет единственное решение [7].

Так как граница $z=H$ свободна, смешанная задача (1.1) с условиями Коши некорректно поставлена. Решение задачи неустойчиво по отношению к погрешности в данных f и g. Получим явное выражение для точного решения задачи.

2. Явное представление точного решения задачи

В бесконечном цилиндре D^∞ рассмотрим функцию источника задачи Неймана для уравнения Лапласа, то есть — решение задачи

$$\begin{aligned}
&\Delta w(P) = -\delta_{MP}, \quad P \in D^\infty,\\
&\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{x=0,l_x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{y=0,l_y} = 0,\\
&\frac{\partial w}{\partial z} \to \pm\frac{1}{2l_x l_y} \quad \text{при} \quad z \to \pm\infty,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

для которой выполнено необходимое условие разрешимости

$$\int\limits_{D^\infty} \delta_{MP} dV_P = 2l_x l_y \frac{1}{2l_x l_y} = 1.$$

Функция источника $\varphi(M,P)$ задачи (2.1) может быть представлена в виде

$$\varphi(M,P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} + W(M,P), \tag{2.2}$$

где r_{MP} — расстояние между точками M и P, $W(M,P)$ — гармоническая функция по P.

Функция источника может быть получена методом отражений в виде суммы функций точечных источников с периодом $2l_x$ по x и $2l_y$ по y

$$\varphi(M,P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \Big(\frac{1}{r_{1,nm}} + \frac{1}{r_{2,nm}} + \frac{1}{r_{3,nm}} + \frac{1}{r_{4,nm}}\Big),$$

где

$$\begin{aligned}
r_{1,nm} &= [(x_M - x_P + 2l_x n)^2 + (y_M - y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2},\\
r_{2,nm} &= [(x_M + x_P + 2l_x n)^2 + (y_M - y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2},\\
r_{3,nm} &= [(x_M - x_P + 2l_x n)^2 + (y_M + y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2},\\
r_{4,nm} &= [(x_M + x_P + 2l_x n)^2 + (y_M + y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2},
\end{aligned}$$

так что $r_{1,00} = r_{MP}$.

Функция источника может быть также получена в виде ряда Фурье

$$\begin{aligned}
\varphi(M,P) = -\frac{1}{2l_x l_y}|z_M - z_P| + \frac{2}{l_x l_y} \sum_{n,m=0,\, n^2+m^2\neq 0}^{\infty} \epsilon_n \epsilon_m \frac{e^{-k_{nm}|z_M - z_P|}}{k_{nm}}\\
\times \cos\frac{\pi n x_M}{l_x} \cos\frac{\pi m y_M}{l_y} \cos\frac{\pi n x_P}{l_x} \cos\frac{\pi m y_P}{l_y},
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$k_{nm} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}, \quad \epsilon_n = \begin{cases} 1, & n > 0,\\ 0.5, & n = 0. \end{cases}$$

Наряду с функцией источника (2.3) будем рассматривать функцию вида

$$\widetilde{\varphi}(M,P) = \frac{1}{2l_x l_y}\big(z_M - z_P + C\big) + \varphi(M,P), \quad C = const,$$

которая при фиксированной точке $M \in D^\infty$ по переменной P есть решение задачи

$$\begin{aligned}
&\Delta w(P) = -\delta_{MP}, \quad P \in D^\infty, \\
&\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{x=0,l_x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{y=0,l_y} = 0, \\
&\frac{\partial w}{\partial z} \to \frac{1}{l_x l_y} \text{ при } z \to +\infty, \quad \frac{\partial w}{\partial z} \to 0 \text{ при } z \to -\infty.
\end{aligned}$$

Заметим, что при условии $z_M < \min\limits_{(x,y)} F(x,y) < z_P$ функция $\widetilde{\varphi}$ представляется в виде ряда

$$\widetilde{\varphi}(M,P) = \frac{1}{2l_x l_y} C + \frac{2}{l_x l_y} \sum_{n,m=0,\, n^2+m^2\neq 0}^{\infty} \epsilon_n \epsilon_m \frac{e^{-k_{nm}|z_M - z_P|}}{k_{nm}} \\ \times \cos\frac{\pi n x_M}{l_x} \cos\frac{\pi m y_M}{l_y} \cos\frac{\pi n x_P}{l_x} \cos\frac{\pi m y_P}{l_y}.$$

Пусть $M \in D(F,H)$. Применяя формулы Грина в области $D(F,H)$ к функции $u(P)$ — решению задачи (1.1) и функциям $\frac{1}{4\pi r_{MP}}$, $\frac{z_M - z_P + C}{4\pi}$ и $W(M,P)$ в (2.2), получим

$$u(M) = \int\limits_{\partial D(F,H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P) \frac{1}{4\pi r_{MP}} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{4\pi r_{MP}}\Big] d\sigma_P, \quad M \in D(F,H) \tag{2.4}$$

$$0 = \int\limits_{\partial D(F,H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P) \frac{z_M - z_P + C}{4\pi} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{z_M - z_P + C}{4\pi}\Big] d\sigma_P, \quad M \in D(F,H) \tag{2.5}$$

и

$$0 = \int\limits_{\partial D(F,H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P) W(M,P) - u(P) \frac{\partial W}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \quad M \in D(F,H). \tag{2.6}$$

Сумма (2.4), (2.5) и (2.6) с учетом (2.2) дает

$$u(M) = \int\limits_{\partial D(F,H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P) \widetilde{\varphi}(M,P) - u(P) \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \quad M \in D(F,H). \tag{2.7}$$

Учитывая однородные граничные условия для $\widetilde{\varphi}$ и u на боковых гранях цилиндрической области $D(F,H)$, получим

$$u(M) = \int\limits_S \Big[g(P) \widetilde{\varphi}(M,P) - f(P) \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P \\ + \int\limits_{\Pi(H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P) \widetilde{\varphi}(M,P) - u(P) \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P,$$

где

$$\Pi(H) = \big\{(x,y,z) :\ 0 < x < l_x,\ 0 < y < l_y,\ z = H\big\}. \tag{2.8}$$

Вводя обозначения

$$\Phi(M) = -\int\limits_S \Big[g(P) \widetilde{\varphi}(M,P) - f(P) \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \quad M \in D(-\infty,H), \tag{2.9}$$

$$v(M) = \int\limits_{\Pi(H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\widetilde{\varphi}(M,P) - u(P)\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \quad M \in D(-\infty, H), \tag{2.10}$$

решение задачи (1.1) получим в виде

$$u(M) = v(M) - \Phi(M), \quad M \in D(F, H), \tag{2.11}$$

где функция Φ вычисляется по известным функциям f и g и может рассматриваться как известная функция.

Гармоническую в области

$$D(-\infty, H) = \big\{(x,y,z) : \, 0 < x < l_x, \, 0 < y < l_y, \, -\infty < z < H\big\}$$

функцию v вида (2.10), в области $D(F,H) \subset D(-\infty, H)$ можно представить согласно (2.11), при условии существования решения задачи (1.1), как $v = u + \Phi$ и доопределить ее на границе $\Pi(H)$ как непрерывную функцию

$$v|_{z=H} = u|_{z=H} + \Phi|_{z=H} = v_H. \tag{2.12}$$

Кроме того, так как функция $\widetilde{\varphi}(M,P)$ и ее производные ограничены при $z_M \to -\infty$, функция $v(M)$ также ограничена $z_M \to -\infty$. Таким образом, функцию v можно рассматривать как решение задачи

$$\begin{aligned} &\Delta v(M) = 0, \quad M \in D(-\infty, H), \\ &v|_{z=H} = v_H, \quad \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{x=0,l_x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{y=0,l_y} = 0, \\ &v \text{ ограничена при } z \to -\infty. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Очевидно, задача (2.13) может быть решена методом Фурье, и функция v может быть выражена через v_H

$$v(M) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (\tilde{v_H})_{nm} e^{k_{nm}(z_M - H)} \cos\frac{\pi n x_M}{l_x} \cos\frac{\pi m y_M}{l_y}, \tag{2.14}$$

$$(\tilde{v_H})_{nm} = \frac{4\epsilon_n \epsilon_m}{l_x l_y} \int\limits_0^{l_x} \int\limits_0^{l_y} v_H(x,y) \cos\frac{\pi n x}{l_x} \cos\frac{\pi m y}{l_y} dx dy. \tag{2.15}$$

Отсюда следует, что если решение задачи (1.1) существует, то функция v может быть представлена в виде ряда Фурье (2.14), причем ряд (2.14) сходится равномерно области $D(-\infty, H - \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, так как

$$\Big|(\tilde{v_H})_{nm} e^{k_{nm}(z_M - H)} \cos\frac{\pi n x_M}{l_x} \cos\frac{\pi m y_M}{l_y}\Big| \leqslant \big|(\tilde{v_H})_{nm}\big| e^{-\varepsilon k_{nm}}.$$

Таким образом, из представления (2.11) решения задачи (1.1) и (2.14) следует, что для получения явного выражения для точного решения задачи (1.1) достаточно выразить функцию v_H (2.12) через заданные функции f и g.

Покажем, что функция v_H удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Пусть $M \in D(-\infty, F)$, где

$$D(-\infty, F) = \big\{(x,y,z) : \, 0 < x < l_x, \, 0 < y < l_y, \, -\infty < z < F(x,y)\big\}.$$

Применяя формулу Грина в области $D(F,H)$ к функции $u(P)$ — решению задачи (1.1) и к функции $\widetilde{\varphi}(M,P)$ вида (2.2), аналогично (2.4), (2.5) и (2.7) получим

$$0 = \int\limits_{\partial D(F,H)} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\widetilde{\varphi}(M,P) - u(P)\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial n_P}(M,P)\right] d\sigma_P, \quad M \in D(-\infty,F).$$

Отсюда с учетом однородных граничных условий для $\widetilde{\varphi}$ и u и обозначений (2.9) и (2.10) получим

$$v(M) = \Phi(M), \quad M \in D(-\infty,F). \tag{2.16}$$

Пусть $a < \min\limits_{(x,y)} F(x,y)$ и $M \in \Pi(a)$, где $\Pi(a)$ — область вида (2.8) при $z = a$, тогда из (2.16) и (2.14) получим систему уравнений относительно коэффициентов Фурье функции v_H

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} (\tilde{v_H})_{nm} e^{k_{nm}(a-H)} \cos\frac{\pi n x_M}{l_x} \cos\frac{\pi m y_M}{l_y} = -\Phi(M). \tag{2.17}$$

Используя (2.15), уравнение (2.17) можно также записать как интегральное уравнение первого рода

$$\int\limits_{\Pi(H)} G(M,P) v_H(P) dx_P dy_P = \Phi(M), \quad M \in \Pi(a), \tag{2.18}$$

где ядро интегрального оператора имеет вид

$$G(M,P) = \frac{4}{l_x l_y} \sum_{n,m=0}^{\infty} \epsilon_n \epsilon_m e^{-k_{nm}(H-a)} \cos\frac{\pi n x_M}{l_x} \cos\frac{\pi m y_M}{l_y} \cos\frac{\pi n x_P}{l_x} \cos\frac{\pi m y_P}{l_y}. \tag{2.19}$$

Уравнение (2.18) будем также записывать в виде

$$G v_H = \Phi(a). \tag{2.20}$$

Из уравнения (2.18) с учетом разложения (2.19) при $z_M = a$ получаем соотношение между коэффициентами Фурье единственного решения v_H и коэффициентами Фурье правой части

$$(\tilde{v_H})_{nm} e^{-k_{nm}(H-a)} = \tilde{\Phi}_{nm}(a), \tag{2.21}$$

где $\tilde{\Phi}_{nm}(a)$ — коэффициенты Фурье функции $\Phi(M)|_{M\in\Pi(a)}$:

$$\tilde{\Phi}_{nm}(a) = \frac{4\epsilon_n\epsilon_m}{l_x l_y} \int\limits_{\Pi(a)} \Phi(x,y,a) \cos\frac{\pi n x}{l_x} \cos\frac{\pi m y}{l_y} dx dy.$$

Отметим, что формула (2.21) характеризует убывание коэффициентов Фурье $\tilde{\Phi}_{nm}(a)$ с ростом n и m, если функции f и g таковы, что обеспечивают существование решения задачи (1.1) и, следовательно, — функции v_H вида (2.12). Подставляя коэффициенты Фурье $(\tilde{v_H})_{nm}$ из (2.21) в ряд (2.14), получим функцию v в области $D(-\infty,H)$

$$v(M) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \tilde{\Phi}_{nm}(a) e^{k_{nm}(z_M - a)} \cos\frac{\pi n x_M}{l_x} \cos\frac{\pi m y_M}{l_y}. \tag{2.22}$$

Ряд (2.22), как и ряд (2.14), сходится равномерно в $D(-\infty,H-\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, если решение задачи (1.1) существует при данных f и g.

Формула (2.11), где функции v и Φ вида (2.22) и (2.9) соответственно, дает явное выражение для решения задачи (1.1).

3. Устойчивое решение задачи при неточных данных Коши

Пусть функции f и g в задаче (1.1) заданы с погрешностью, т. е. вместо f и g заданы функции f^δ и g^δ, такие что

$$\|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leqslant \delta, \quad \|g^\delta - g\|_{L_2(S)} \leqslant \delta.$$

Построим приближенное решение задачи (1.1), сходящееся к точному решению при $\delta \to 0$. Функция Φ вида (2.9) в этом случае может быть получена приближенно:

$$\Phi^\delta(M) = -\int\limits_S \Big[g^\delta(P)\widetilde{\varphi}(M,P) - f^\delta(P)\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial n_P}(M,P)\Big]d\sigma_P. \tag{3.1}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к разности функций (3.1) и (2.9) при $M \in \Pi(a)$, $a < \min\limits_{(x,y)} F(x,y)$, получим оценку правой части интегрального уравнения (2.18)

$$|\Phi^\delta(M) - \Phi(M)| \leqslant \max_{M\in\Pi(a)} \Big(\int\limits_S \widetilde{\varphi}^2(M,P)d\sigma_P\Big)^{1/2}\|g^\delta - g\|_{L_2(S)}$$
$$+ \max_{M\in\Pi(a)} \Big(\int\limits_S \big[\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial n_P}(M,P)\big]^2 d\sigma_P\Big)^{1/2}\|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leqslant C\delta. \tag{3.2}$$

В качестве приближенного решения уравнения (2.18) будем рассматривать экстремаль функционала Тихонова [6, с. 68] с условным стабилизатором [8, с. 35] нулевого порядка

$$M^\alpha[w] = \big\|Gw - \Phi^\delta(a)\big\|^2_{L_2(\Pi(a))} + \alpha\|w\|^2_{L_2(\Pi(H))}, \quad \alpha > 0, \tag{3.3}$$

где G — интегральный оператор в (2.20). Экстремаль может быть получена как решение уравнения Эйлера для функционала (3.3), которое в операторной форме имеет вид

$$G^*Gw + \alpha w = G^*\Phi^\delta(a),$$

а в коэффициентах Фурье функции w

$$e^{-2k_{nm}(H-a)}\tilde{w}_{nm} + \alpha\tilde{w}_{nm} = e^{-k_{nm}(H-a)}\tilde{\Phi}^\delta_{nm}(a),$$

где

$$\tilde{\Phi}^\delta_{nm}(a) = \frac{4\epsilon_n\epsilon_m}{l_x l_y}\int\limits_{\Pi(a)} \Phi^\delta(x,y,a)\cos\frac{\pi n x}{l_x}\cos\frac{\pi m y}{l_y}dxdy \tag{3.4}$$

— коэффициенты Фурье функции $\Phi^\delta(M)|_{M\in\Pi(a)}$. Решая уравнение относительно коэффициентов Фурье экстремали и подставляя экстремаль w^δ_α вместо v_H в (2.14), найдем приближение v^δ_α к функции v в области $D(-\infty,H)$:

$$v^\delta_\alpha(M) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}^\delta_{nm}(a)e^{k_{nm}(z_M-a)}}{1+\alpha e^{2k_{nm}}(H-a)}\cos\frac{\pi n x_M}{l_x}\cos\frac{\pi m y_M}{l_y}. \tag{3.5}$$

Отметим, что функция (3.5) отличается от точной функции (2.22) множителем $(1+\alpha e^{2k_{nm}(H-a)})^{-1}$, обеспечивающим сходимость ряда.

В соответствии с (2.11) приближенное решение задачи (1.1) получим в виде

$$u_\alpha^\delta(M) = v_\alpha^\delta(M) - \Phi^\delta(M), \quad M \in D(F,H), \tag{3.6}$$

где v_α^δ и Φ^δ — функции вида (3.5) и (3.1).

Для приближенного решения (3.6) имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть решение задачи* (1.1) *существует. Тогда для любого* $\alpha = \alpha(\delta)$ *такого, что*

$$\alpha(\delta) \to 0 \quad \text{и} \quad \delta/\sqrt{\alpha(\delta)} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0,$$

функция $u_{\alpha(\delta)}$ *вида* (3.6) *равномерно сходится при* $\delta \to 0$ *к точному решению в области* $D(F+\varepsilon, H-\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 0{,}5(H - \max\limits_{(x,y)} F(x,y))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В области $D(F+\varepsilon, H-\varepsilon)$ в соответствии с (3.6) и (2.11) оценим разность

$$|u_\alpha^\delta - u| \leqslant |v_\alpha^\delta - v| + |\Phi^\delta - \Phi|. \tag{3.7}$$

Для разности $v_\alpha^\delta - v$ получаем

$$|v_\alpha^\delta - v| \leqslant |v_\alpha^\delta - v_\alpha| + |v_\alpha - v|, \tag{3.8}$$

где v_α — функция вида (3.5) при точных f и g,

$$v_\alpha(M) = -\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_{nm}(a) e^{k_{nm}(z_M - a)}}{1 + \alpha e^{2k_{nm}(H-a)}} \cos\frac{\pi n x_M}{l_x} \cos\frac{\pi m y_M}{l_y}.$$

Оценим разность $v_\alpha^\delta - v_\alpha$ в (3.8) при $z_M < H - \varepsilon$, используя (3.2),

$$\begin{aligned} |v_\alpha^\delta(M) - v_\alpha(M)| &\leqslant \left| \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{e^{k_{nm}(z_M - a)}}{1 + \alpha e^{2k_{nm}(H-a)}} \right| \cdot 4 \max_{P \in \Pi(a)} \left|\Phi^\delta(P) - \Phi(P)\right| \\ &\leqslant C_1 \delta \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{e^{k_{nm}(H-\varepsilon-a)}}{1 + \alpha e^{2k_{nm}(H-a)}} \leqslant C_1 \delta \max_x \left[\frac{e^x}{1 + \alpha e^{2x}}\right] \sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-k_{nm}\varepsilon} \leqslant C_2 \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Для разности $v_\alpha - v$ в (3.8) при $z_M < H - \varepsilon$ имеем оценку

$$|v_\alpha - v| \leqslant \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha e^{2k_{nm}(H-a)} e^{k_{nm}(H-\varepsilon-a)}}{1 + \alpha e^{2k_{nm}(H-a)}} \left|\tilde{\Phi}_{nm}(a)\right|.$$

Используя (2.21) и применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} |v_\alpha - v| &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha e^{2k_{nm}(H-a)} e^{-k_{nm}\varepsilon}}{1 + \alpha e^{2k_{nm}(H-a)}} \left|(\tilde{v_H})_{nm}\right| \\ &\leqslant \left[\sum_{n,m=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha e^{2k_{nm}(H-a)}}{1 + \alpha e^{2k_{nm}(H-a)}} \right)^2 e^{-2k_{nm}\varepsilon} \right]^{1/2} \cdot \frac{2}{\sqrt{l_x l_y}} \|v_H\|_{L_2}. \end{aligned}$$

Так как ряд, зависящий от параметра α, мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum e^{-2\varepsilon k_{nm}}$, то возможен предельный переход по α и, таким образом,

$$|v_\alpha - v| \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to 0. \tag{3.10}$$

Из (3.8), (3.9) и (3.10) и условий теоремы следует, что

$$|v^\delta_{\alpha(\delta)} - v| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{3.11}$$

Вторая разность в правой части (3.7) оценивается аналогично (3.2), т. е., применяя к этой разности неравенство Коши–Буняковского при $M \in D(F+\varepsilon, H-\varepsilon)$, получаем

$$\begin{aligned}|\Phi^\delta(M) - \Phi(M)| \leq & \max_{M\in D(F+\varepsilon,H-\varepsilon)} \Big(\int\limits_S \widetilde{\varphi}^2(M,P)d\sigma_P\Big)^{1/2} \|g^\delta - g\|_{L_2(S)} \\ & + \max_{M\in D(F+\varepsilon,H-\varepsilon)} \Big(\int\limits_S \big[\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial n_P}(M,P)\big]^2 d\sigma_P\Big)^{1/2} \|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leqslant C_3\delta.\end{aligned}$$

Отсюда, а также из (3.7) и (3.11) следует утверждение теоремы. □

4. Заключение

Доказанная в предыдущем разделе теорема является обоснованием для использования формул (3.6), (3.1), (3.5), (3.4) для построения приближенного решения задачи (1.1). Аналогично [5] из приближенного решения может быть выделена функция Карлемана. Другие методы построения функции Карлемана предложены в [9, 10].

Формулы (3.6), (3.1), (3.5), (3.4) могут быть использованы для построения эффективных вычислительных алгоритмов численного решения задачи. При этом при вычислении коэффициентов Фурье по формулам (3.4) может быть использован метод [11], причем при построении приближенного решения используются дискретные ряды Фурье, суммировать которые можно, используя модифицированный метод Хемминга [12].

Построенное решение задачи (1.1) может быть использовано для решения обратной задачи термографии (см. [13]) в приложении к задачам математической обработки термограмм в тепловизионных исследованиях в медицине.

Аналогичный метод может быть применен к задаче продолжения потенциального поля в геофизике (см. [14]).

References

[1] M. Joachimiak, “Choice of the regularization parameter for the Cauchy problem for the Laplace equation”, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, **30**:10 (2020), 4475–4492.

[2] С. Б. Сорокин, “Экономичный прямой метод численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа”, *Сиб. журн. вычисл. матем.*, **22**:1 (2019), 99–117; англ. пер.:S. B. Sorokin, “An Efficient Direct Method for Numerically Solving the Cauchy Problem for Laplace’s Equation”, *Num. Anal. Appl.*, **12**:1 (2019), 87–103.

[3] М. М. Лаврентьев, *О некоторых некорректных задачах математической физики*, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962. [M. M. Lavrent’ev, *On Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics*, Academy of Sciences Publ., Novosibirsk, 1962 (In Russian)].

[4] Г. М. Голузин, В. И. Крылов, “Обобщенная формула Carleman’a и приложение ее к аналитическому продолжению функций”, *Математический сборник*, **40**:2 (1933), 144–149. [G. M. Goluzin, V. I. Krylov, “Generalized Carleman formula and its application to the analytic continuation of functions”, *Mat. Sb.*, **40**:2 (1933), 144–149 (In Russian)].

[5] Е. Б. Ланеев, “О построении функции Карлемана на основе метода регуляризации Тихонова в некорректно поставленной задаче для уравнения Лапласа”, *Дифференциальные уравнения*, **54**:4 (2018), 483–491; англ. пер.:E. B. Laneev, “Construction of a Carleman function based on the Tikhonov regularization method in an ill-posed problem for the Laplace equation”, *Differential Equations*, **54**:4 (2018), 475–478.

[6] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1979. [A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, *Methods for Solving Ill-Posed Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1979 (In Russian)].

[7] Е. М. Ландис, “Некоторые вопросы качественной теории эллиптических уравнений второго порядка (случай многих независимых переменных)”, *Успехи математических наук*, **18**:1(109) (1963), 3–62; англ. пер.:E. M. Landis, “Some problems of the qualitative theory of second order elliptic equations (case of several independent variables)”, *Russian Math. Surveys*, **18**:1 (1963), 1–62.

[8] В. Б. Гласко, *Обратные задачи математичесой физики*, Изд-во МГУ, М., 1979. [V. B. Glasko, *Inverse Problems of Mathematical Physics*, MSU Publ., Moscow, 1984 (In Russian)].

[9] Ш. Ярмухамедов, “Функция Карлемана и задача Коши для уравнения Лапласа”, *Сибирский математический журнал*, **45**:3 (2004), 702–719; англ. пер.:Sh. Yarmukhamedov, “Carleman function and the Cauchy problem for the Laplace equation”, *Siberian Mathematical Journal*, **45**:3 (2004), 580–595.

[10] E. N. Sattorov, Z. E. Ermamatova, “Carleman’s formula of a solutions of the Poisson equation in bounded domain”, *Ural Mathematical Journal*, **7**:2 (2021), 110–120.

[11] O. Baaj, “On the application of the Fourier method to solve the problem of correction of thermographic images”, *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*, **30**:3 (2022), 205–216.

[12] E. B. Laneev, O. Baaj, “On a modification of the Hamming method for summing discrete Fourier series and its application to solve the problem of correction of thermographic images”, *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*, **30**:4 (2022), 342–356.

[13] E. B. Laneev, N. Yu. Chernikova, O. Baaj, “Application of the minimum principle of a Tikhonov smoothing functional in the problem of processing thermographic data”, *Advances in Systems Science and Applications*, 2021, № 1, 139–149.

[14] E. B. Laneev, E. Yu. Ponomarenko, “On a linear inverse potential problem with approximate data on the potential field on an approximately given surface”, *Eurasian Mathematical Journal*, **14**:1 (2023), 57–70.

Информация об авторах

Ланеев Евгений Борисович, доктор физико-математических наук, профессор Математического института им. С. М. Никольского, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: elaneev@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4255-9393

Климишин Александр Владиславович, аспирант, Математический институт им. С. М. Никольского, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: sa-sha-02@yandex.ru

Information about the authors

Evgeniy B. Laneev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematical Institute named after S. M. Nikolsky, Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation. E-mail: elaneev@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4255-9393

Alexander V. Klimishin, Post-Graduate Student, Mathematical Institute named after S. M. Nikolsky, Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation.
E-mail: sa-sha-02@yandex.ru

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Ланеев Евгений Борисович
E-mail: elaneev@yandex.ru

Поступила в редакцию 05.02.2024 г.
Поступила после рецензирования 13.05.2024 г.
Принята к публикации 07.06.2024 г.

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Evgeniy B. Laneev
E-mail: elaneev@yandex.ru

Received 05.02.2024
Reviewed 13.05.2024
Accepted for press 07.06.2024